数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 58-65

共形ブロック束の Gauss-Manin 接続

河野俊丈（東京大学大学院数理科学研究科）

1. はじめに

共形場理論における共形ブロック空間は点付き Riemann 面に対して定まる線形空間であり，[6] などでアフィン Lie 代数の表現を用いて構成された．これは，点付き Riemann 面のモジュライ空間上のベクトル束を定義し，そこには射影的に平坦な接続が定まる．種数 0 の場合，この接続は KZ 接続とよばれる平坦接続である．本稿では，KZ 接続が，ある種の配置空間上の局所系係数のホモロジー群を用いて記述されることを説明する．この方法により，KZ 接続を Gauss-Manin 接続とみなすことができる．接続行列の表示を Drinfel'd 結合子を用いて対数微分形式の反復積分で表すと，多重ゼータ値によって表示される．一方，これを Gauss-Manin 接続として計算すると，多変数超越幾何積分によって表現される．KZ 接続の Gauss-Manin 接続としての解釈は，多重ゼータ値の線形結合と多変数超幾何関数との間の関係を与える．

2. 共形ブロック空間

ここでは，$\mathfrak{g} = sl_2(\mathbf{C})$ の場合を扱うが，共形ブロック空間の定式化は一般の複素単純 Lie 環の場合も同様である．$sl_2(\mathbf{C})$ の標準的な基底を H, E, F で表す．これらは関係式

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H.$$

を満たす．アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ をループ代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}((\xi))$ の中心拡大

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}((\xi)) \oplus \mathbf{C}c$$

として，交換関係

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X,Y] \otimes fg + \mathrm{Res}_{\xi=0}\, df\, g\, \langle X, Y \rangle c$$

によって定義する．ここで，$\mathbf{C}((\xi))$ は Laurent 級数のなす代数であり，$\langle\, , \rangle$ は Cartan-Killing 形式を表す．

Laurent 級数のベキの正の部分と負の部分を分解して Lie 環の直和分解 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_-$ が得られる．レベルとよばれる正の整数 K を固定する．整数 λ は $0 \leq \lambda \leq K$ を満たすとする．$\mathfrak{g}$ の最高ウェイトが λ の既約表現を V_λ で表す．これを用いて，最高ウエイト λ で，中心 c が $K \cdot \mathrm{id}$ として作用するような $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約表現 $\mathcal{H}_\lambda$ が，次のように構成される．まず，Verma 加群 $\mathcal{M}_\lambda$ を $U(\mathcal{N}_-) \cdot V_\lambda$ として，$\mathcal{N}_+ V_\lambda = 0$ を満たすように定義し，$\mathcal{H}_\lambda$ をその既約な商として定める．

$(\Sigma, p_1, \cdots, p_n)$ を相異なる点 $p_1, \cdots, p_n$ が指定された Riemann 面とする．それぞれの点にレベル K の最高ウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を与える．$\mathcal{M}_p$ を Σ 上の有理型関数で，高々 $p_1, \cdots, p_n$ に極をもつもの全体とする．共形ブロックの空間を

$$\mathcal{H}_\Sigma(p, \lambda) = \mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_n} / (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M}_p)$$

で定義する．ここで，$\mathcal{M}_p$ は $p_1, \cdots, p_n$ における Laurent 展開によって対角的に作用する．

最高ウェイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を固定して，点 $p_1, \cdots, p_n$ の位置と Riemann 面の複素構造を動かして和集合

$$\bigcup_{p_1, \cdots, p_n} \mathcal{H}_\Sigma(p, \lambda)$$

をとる．Σ の種数を g とすると，上の和集合は点付き Riemann 面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上のベクトル束の構造をもち，これを共形ブロック束とよぶ．共形ブロック束には，Virasoro 代数の作用を用いて射影的平坦な接続が定義される．

3. KZ 接続

種数 0 の場合には共形ブロック束に定義される接続は KZ 方程式を用いて記述される．まず，一般的な KZ 方程式について述べる．複素平面上の互いに異なる順序のついた n 個の点の配置空間を

$$X_n = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \ ; \ z_i \neq z_j, \ i \neq j\}$$

で表す．Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan-Killing 形式についての正規直交基底を $\{I_\mu\}$ として，$\Omega = \sum_\mu I_\mu \otimes I_\mu$ とおく．$r_i : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V_i), 1 \leq i \leq n$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現とする．Ω_{ij} を Ω のテンソル積 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ への i 番目と j 番目の成分への作用とする．

Casimir 元 $c=\sum_\mu I_\mu \cdot I_\mu$ が Lie 環の普遍展開環 $U\mathfrak{g}$ の中心に属することを用いて，関係式

$$[\Omega_{ik}, \Omega_{ij}+\Omega_{jk}]=0, \quad i,j,k\,(\text{は相異なる}),$$
$$[\Omega_{ij}, \Omega_{k\ell}], \quad i,j,k,\ell\,(\text{は相異なる})$$

が成り立つ．KZ 接続を $\mathrm{End}(V_1\otimes\cdots\otimes V_n)$ に値をもつ 1 次微分形式

$$\omega=\frac{1}{\kappa}\sum_{i,j}\Omega_{ij}d\log(z_i-z_j)$$

によって定義する．ここで κ はパラメータで 0 でない複素数である．KZ 接続は X_n 上のファイバーが $V_1\otimes\cdots\otimes V_n$ であるような自明なベクトル束の接続形式を定め，この接続の水平切断の空間は，KZ 方程式を全微分方程式で表示した

$$d\varphi=\omega\varphi$$

の解全体である．

対数微分形式 $\omega_{ij}=d\log(z_i-z_j)$, $1\le i,j\le n$ についての Arnold の関係式

$$\omega_{ij}\wedge\omega_{jk}+\omega_{jk}\wedge\omega_{k\ell}+\omega_{k\ell}\wedge\omega_{ij}=0$$

と Ω_{ij} についての上の 2 次関係式から

$$\omega\wedge\omega=0$$

がしたがう．これにより，ω は平坦接続を定めることが分かる．

配置空間 X_n の基本群は n 本のひもからなる純粋組みひも群であり，これを P_n で表す．接続 ω の水平切断により，P_n の線形表現の 1-パラメータ族

$$\theta_\kappa : P_n \to GL(V_1\otimes\cdots\otimes V_n).$$

が得られる．対称群 S_n は X_n に座標関数の置換によって作用する．この作用による商空間 X_n/S_n を Y_n で表す．Y_n の基本群は n 本にひもからなる組みひも群 B_n である．$V_1=\cdots=V_n=V$ のとき，対称群 S_n は $X_n\times V^{\otimes n}$ に対角的に作用し．接続形式 ω は組みひも群の線形表現の 1-パラメータ族

$$\theta_\kappa : B_n \to GL(V^{\otimes n}).$$

を定める．

KZ接続は種数0の共形ブロック空間を不変にする．このときパラメータは$\kappa = K+2$となる．このように共形場理論においてはパラメータが整数値をとるが，次節では，κがgenericのときにKZ方程式の解の空間の記述を与える．

4. 超幾何積分とGauss-Manin接続

Schechtman-Varchenko [5] にしたがい，パラメータκがgenericのとき，KZ方程式$d\varphi = \omega\varphi$の解を多変数超幾何関数を用いて表す．

$$\pi : X_{m+n} \longrightarrow X_n$$

を座標関数の最初のn個の成分を対応させる写像

$$(z_1, \cdots, z_n, t_1, \cdots, t_m) \mapsto (z_1, \cdots, z_n)$$

によって定義する．射影πのファイバーを$X_{n,m}$で表す．

複素数λに対してM_λを最高ウェイトλの$sl_2(\mathbf{C})$のVerma加群とする．つまり，最高ウェイトベクトルとよばれる0でないベクトル$v \in M_\lambda$が存在して

$$Hv = \lambda v,\ Ev = 0$$

が成立し，M_λは$F^j v,\ j \geq 0$によって張られている．

ここで，テンソル積$M_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes M_{\lambda_n}$を考え，$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$とおく．非負整数$\ell$に対して，ウエイト$\lambda - 2\ell$のベクトルからなる空間を

$$W[\lambda - 2\ell] = \{x \in M_{\lambda_1} \otimes \cdots M_{\lambda_n}\ ;\ Hx = (\lambda - 2\ell)x\}$$

で定める．さらに

$$N[\lambda - 2\ell] = W[\lambda - 2\ell]/F \cdot W[\lambda - 2\ell + 2]$$

とおく．

KZ接続ωは$\mathfrak{g}$の$V_{\lambda_1} \otimes \cdots V_{\lambda_n}$への対角作用と可換であり，$N[\lambda - 2\ell]$を保つ．パラメータ$\kappa, \lambda$に対して，$X_{n+m}$上の多価関数

$$\Phi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j)^{\frac{\lambda_i \lambda_j}{\kappa}} \prod_{1 \leq i \leq m, 1 \leq \ell \leq n} (t_i - z_\ell)^{-\frac{\lambda_\ell}{\kappa}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)^{\frac{2}{\kappa}}$$

を考える．$\mathcal{L}$を多価関数Φに対応する局所系とする．

対称群 S_m の $X_{n,m}$ への $(t_1, \cdots, t_m)$ の置換による作用に関して，関数 Φ は不変である．この作用による商空間を $Y_{n,m} = X_{n,m}/S_m$ とおく．局所系 $\mathcal{L}$ を $X_{n,m}$ に制限したものは $Y_{n,m}$ 上の局所系を定める．これを同じ記号 $\mathcal{L}$ で表す．また，双対局所系を $\mathcal{L}^*$ で表す．

パラメータ $\kappa, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ を十分一般にとる，このとき局所系係数のホモロジー群の消滅定理

$$H_j(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \cong 0, \quad j \neq m$$

が成り立ち，同型

$$H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \cong H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)$$

が成立する．ここで，右辺は局所有限な無限和を許すチェインによるホモロジー群を表す．

捩じれ de Rham 複体 $(\Omega^*(Y_{n,m}), \nabla)$ は共変微分 $\nabla : \Omega^j(Y_{n,m}) \to \Omega^{j+1}(Y_{n,m})$ を

$$\nabla\varphi = d\varphi + d\log\Phi \wedge \omega, \quad \varphi \in \Omega^j(Y_{n,m})$$

と定義することにより定まる．局所系係数のホモロジー群と捩じれ de Rham コホモロジー群の間の非退化なペアリング

$$H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \times H^m(\Omega^*(Y_{n,m}), \nabla) \to \mathbf{C}$$

が，対応

$$(c, w) \mapsto \int_c \Phi\omega.$$

によって与えられる．

写像

$$\rho : W[\lambda - 2m] \to \Omega^m(Y_{n,m})$$

を以下のように定義される有理関数 $R_w(t, z)$, $w \in W[\lambda - 2m]$ を用いて

$$\rho(w) = R_w(t, z) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_m$$

で定める．

まず，$v_k \in M_{\lambda_k}$, $1 \leq k \leq n$ を最高ウェイトベクトルとして $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ とおく．整数の n 個の組 $J = (j_1, \cdots, j_n)$ に対して，

$$F^J v = F^{j_1} v_1 \otimes \cdots \otimes F^{j_n} v_n.$$

とおく，ウエイト空間 $W[\lambda-2m]$ は $j_1+\cdots+j_n=m$ を満たす J に対応して基底 $F^J v$ をもつ．整数の列 $(i_1,\cdots,i_m)=(\underbrace{1,\cdots,1}_{j_1},\cdots,\underbrace{n,\cdots,n}_{j_m})$ に対して

$$\eta_J(z,t)=\frac{1}{(t_1-z_{i_1})\cdots(t_m-z_{i_m})}.$$

とおき，有理関数 $R_J(z,t)$ を

$$R_J(z,t)=\sum_{\sigma\in S_m}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\eta_J(z_1,\cdots,z_n;t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(m)})$$

によって定める．

このとき ρ は捩じれ de Rham コホモロジー群への写像

$$\rho: N[\lambda-2m]\longrightarrow H^m(\Omega^*(Y_{n,m}),\bigtriangledown).$$

を誘導する．この構成により写像

$$\phi: H_m(Y_{n,m},\mathcal{L}^*)\longrightarrow N[\lambda-2m]^*$$

が積分により

$$\langle\phi(c),w\rangle=\int_c\Phi\rho(w).$$

で定義される．Schechtman, Varchenko [5] により積分

$$\int_c\Phi\rho(w)$$

は $N[\lambda-2m]$ に値をとる KZ 方程式の解であることが知られている．さらに，次が示される．

定理 ([5]) 局所系 $\mathcal{L}$ を generic とする．このとき ϕ は同型写像

$$H_m(Y_{n,m},\mathcal{L}^*)\cong N[\lambda-2m]^*.$$

を与える．さらにこの同型は純粋組みひも群 P_n の作用について同変的である．

このようにして，次の 2 通りの方法で純粋組みひも群の線形表現が導かれ，これらは表現として同値であることがわかる．

1. P_n の局所系係数のホモロジー $H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)$ への作用.

2. $N[\lambda - 2m]$ に値をとるKZ 接続のモノドロミー表現.

とくに $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ で $m = 2$ のとき，組みひも群の線形表現

$$B_n \to Aut\ H_2(Y_{n,2}, \mathcal{L}^*)$$

は，Lawrence, Krammer, Bigelow ([1]) による表現にほかならない．上の考察から，この線形表現はKZ接続のモノドロミー表現

$$B_n \to Aut\ N[\lambda - 4]^*.$$

と同型であることが分かる．

種数 0 の共形ブロック空間の定義において，Riemann 球面 $\mathbf{C}P^1$ 上に $n+1$ 個の点 $p_1, \cdots, p_{n+1}$ を与え，$p_{n+1} = \infty$ とする．また，これらの点にレベル K の最高ウエイト $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ を与える．対応する共形ブロック空間 $\mathcal{H}(p, \lambda)$ は

$$(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_n} \otimes V^*_{\lambda_{n+1}})/\mathfrak{g}$$

の商空間と同一視される．これは $\mathcal{H}_\lambda$ をVerma加群の商として表すときの代数関係式に由来する．Feigin, Schechtman, Varchenko [2] によってこの代数関係式は ρ と両立していて写像

$$\rho : \mathcal{H}(p, \lambda) \to H^m(\Omega^*(Y_{n,m}), \nabla).$$

が得られることが示されている．この写像により

$$\phi : H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \to \mathcal{H}(p, \lambda)^*$$

が，積分によって

$$\langle \phi(c), w \rangle = \int_c \rho(w).$$

で定義される．

共形ブロックの空間はKZ 接続で不変であり，そのモノドロミー表現として P_n は $\mathcal{H}(p, \lambda)^*$ に作用し，写像 ϕ は P_n の作用について同変的である．

共形場理論においてパラメータ κ と最高ウェイトが特別な値をとるとき，写像 $\phi : H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \to \mathcal{H}(p, \lambda)^*$ は必ずしも同型ではない．

自然な写像

$$\alpha : H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \to H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)$$

を考え $\mathrm{Im}(\alpha) = H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)_{reg}$ とおく．$H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)_{reg}$ は正規化可能なサイクルの空間とよばれる．次の定理が成立する．

定理 ([4]) ϕ は同型写像

$$H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)_{reg} \cong \mathcal{H}(p, \lambda)^*.$$

を与え，これは P_n の作用について同変的である．

参考文献

[1] S. Bigelow, The Lawrence-Krammer representation, Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001), 51–68, Proc. Sympos. Pure Math. **71**, Amer. Math. Soc., 2003.

[2] B. Feigin, V. Schechtman and A. Varchenko, On algebraic equations satisfied by hyergeometric correlators in WZW models I, Comm. Math. Phys. **163** (1994), 173–184.

[3] T. Kohno, *Conformal field theory and topology*, Translations of Mathematical Monographs **210**, American Mathematical Society, 2002.

[4] T. Kohno, Hyperplane arrangements, local system homology and iterated integrals, preprint 2010.

[5] V. Schechtman and A. Varchenko, Hypergeometric solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov equation, Lett. in Math. Phys. **20** (1990), 93 – 102.

[6] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, Conformal field theoy on universal family of stable curves with gauge symmetries, Adv. Stud. Pure Math. **19** (1990), 459–566.

[7] A. Varchenko, *Multidimensional hypergeometric functions and representation theory of Lie algebras and quantum groups*, Advances in Math. Phys. **21**, World Scientific, 1995.